

Trois problèmes de géométrie, conservés par un papyrus genevois

Par Jean Rudhardt, Genève

1. Le document

Le papyrus dont nous traitons ici est conservé à la Bibliothèque Publique et Universitaire de Genève, sous le numéro d'inventaire 259. Il appartient à un lot de papyrus achetés en Egypte par Ed. Naville, à la demande de J. Nicole, entre 1882 et 1907. Nous n'en connaissons pas la provenance d'une façon plus précise.

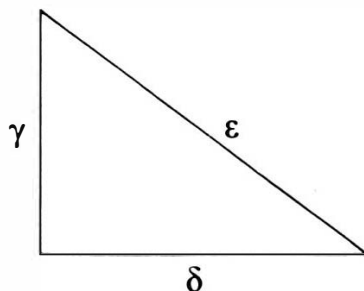
Il s'agit de trois fragments contigus, s'adaptant parfaitement les uns aux autres et formant un morceau de 17 sur 17,5 cm. Mutilé dans sa largeur, à gauche et à droite, le document a partiellement gardé sa hauteur primitive.

Au recto, nous trouvons les restes d'un livre de comptes, très endommagés; au verso, deux colonnes du texte mathématique, objet de la présente publication. La première colonne est complète; le bas de la seconde est déchiré. L'écriture du recto semble dater du IIe siècle de notre ère. Au verso, d'un type différent, moins cursive, et d'un tracé parfois gêné par les aspérités du papyrus, l'écriture de notre texte n'est probablement pas beaucoup plus tardive.

2. Transcription

Col. I

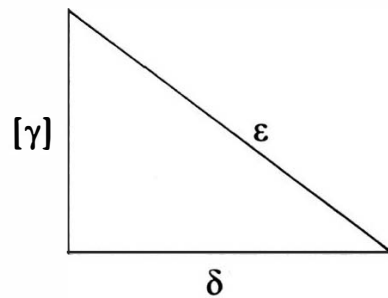
- 1 Ἔστω δὲ τριγωνοῦν ὀρθογώνιον ἔχον
τὴν μὲν κάθετοῦν ποδῶν γ, τὴν
δὲ ὑποτείνουσαν ε, εὐρεῖν
τὴν βάσιν. Εὐρήσομεν δὲ
5 οὕτως. Τὰ ε ἐφ' αὐτά, γίγνεται κε·
καὶ τὰ γ ἐφ' αὐτά, γίγνεται θ̄· καὶ ἀ-
πὸ τῶν κ̄ε ἄρον τὰ θ̄, λοιπὰ ιζ̄·
ῶν πλευρὰ δ̄. Ἔσται ἡ βά-
σις δ̄. Ὀμοίως δὲ καὶ ἐπ' ἄλ-
10 λων ἀριθμῶν εὐρήσομεν.



Ἐὰν ἦ τρίγωνον ὀρθογώνιον
 οὗ ἡ μὲν κάθετος καὶ ἡ ὑπο-
 τείνουσα ἰς τὸ αὐτὸ ποδ(ῶν) η ,
 ἡ δὲ βάσις ποδ(ῶν) δ , τούτου
 15 καθ' ἰδίαν ζητήσομε[ν]
 τήν τε κάθετον καὶ τήν
 ὑποτείνουσαν. Εὐρήσο-
 μεν δὲ οὕτως. Τὰ δ ἐφ' αὐ-
 τά, γίγνεται ἰς· μέρισον ἰς τὸν η ,

Col. II

20 γίγνεται β · τὰ β ἄφελε ἀπὸ τῶν η ,
 λοιπὰ ζ · ὧν ἡμισοῦ γ . Ἔσται
 ἡ κά[θε]τος γ . Ἐπειτα τὰ γ
 ἄφελ[ε ἀ]πὸ τῶν η , λοιπὰ ϵ .
 Ἔσται ἄρα ἡ ὑποτείνουσα
 25 πο[δ(ῶν)] ϵ .

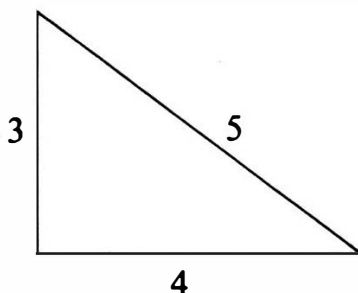


[Ἐὰν ἦ τ]ρίγων[ο]ν ὀρθογών[ιον]
 [οὗ ἡ μὲ]ν κάθετος καὶ ἡ β[άσις]
 [ἰς τὸ αὐτ]ὸ ποδ(ῶν) δ , ἡ δὲ ὑπο[τεί-]
 [νουσα πο]δ(ῶν) η , εὐρεῖν τ[ήν τε]
 30 [κάθετον καθ' ἰδ]ίαν καὶ τ[ήν]
 [βάσιν. Εὐρήσο]μεν δὲ [οὕ-]
 [τως. Τὰ δ ἐφ' α]ὐτά, β [
 [
 [. .]. [
 35 [] . α . [
 πλη . [
 ταῦτα[
 λοιπ . [
 ἔσται[
 40 ἄφελ[ε

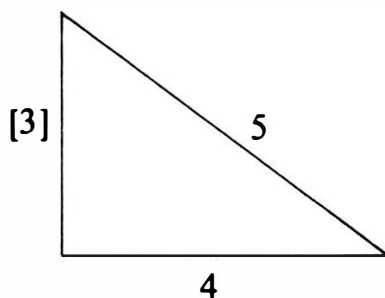
- 1 Identification incertaine de plusieurs lettres; lecture globale non douteuse.
 5 Lire les chiffres: $\bar{\epsilon}$ et $\bar{\kappa}\bar{\epsilon}$.
 13 Lire: $\epsilon\iota\varsigma\ \tau\acute{o}\ \alpha\upsilon\tau\acute{o}\ \pi\omicron\delta(\acute{\omega}\nu)\ \bar{\eta}$.
 15 Lire: $\kappa\alpha\tau'\ \acute{\iota}\delta\acute{\iota}\alpha\nu$. Irrégularité de l'aspiration, cf. Mayser, *Grammatik d. griech. Papyri aus d. Ptolemäerzeit* 1 (Leipzig 1906) 199–200.
 19 Lire: $\epsilon\iota\varsigma\ \tau\acute{o}\ \bar{\eta}$.
 21 Lire: $\bar{\eta}\mu\iota\sigma\upsilon$. Confusion υ - $\omicron\upsilon$, cf. Mayser, op. cit. 1, 118.
 26–39 Restitutions incertaines, données à titre d'exemple.
 32 Lecture $\bar{\rho}$ incertaine. Il paraît impossible de lire $\gamma\bar{\iota}(\gamma\nu\epsilon\tau\alpha\iota)$

3. Traduction

Soit un triangle rectangle ayant son côté vertical de 3 pieds et son hypoténuse de 5, trouver la base. Nous la trouverons comme suit. Les 5, multipliés par eux-mêmes, font 25; les 3, multipliés par eux-mêmes, font 9. Des 25 enlève les 9, reste 16 – dont la racine carrée est 4. La base sera de 4 pieds. En présence d'autres données numériques, nous trouverons (la solution) de pareille façon.



Si nous avons un triangle rectangle dont le côté vertical et l'hypoténuse font ensemble 8 pieds et la base, 4 pieds, nous chercherons les longueurs respectives de son côté vertical et de son hypoténuse. Nous les trouverons comme suit. Les 4, multipliés par eux-mêmes, font 16; divise par 8, cela fait 2; enlève les 2 des 8, reste 6 – dont la moitié est 3. Le côté vertical sera de 3 (pieds). Ensuite, enlève les 3 des 8, reste 5. L'hypoténuse sera donc de 5 pieds.



[Si nous avons] un triangle rectangle dont le côté vertical et la [base] font [ensemble] 14 pieds et l'hypo[ténuse], 10 pieds, trouver les [longueurs respect]ives du [côté vertical] et de la [base]. Nous [les trouverons comme suit. Les 10, multipliés par eux-]mêmes, 100 ...

suite du texte mutilée.

4. Observations générales

Nous avons sous les yeux les énoncés et les solutions de deux problèmes, partiellement d'un troisième, tous relatifs au théorème de Pythagore. Situés au verso rugueux d'un document administratif, ces textes furent écrits par un particulier. Il ne s'agit pourtant pas d'exercices accomplis par un écolier. La régularité de la mise en page et l'emploi de formules, telles que «nous trouverons la solution comme suit» (ll. 4–5. 17–18. 31–32) ou «en présence d'autres données numériques, nous trouverons la solution de pareille façon» (ll. 9–10), semblent exclure cette hypothèse. Nous avons sans doute affaire à la copie d'un traité ou, mieux encore, d'un manuel de mathématiques. En effet, l'auteur ne fournit aucune démonstration; énumérant les opérations à effectuer, il enseigne de simples recettes, propres à résoudre les problèmes d'un type donné.

Application banale du théorème de Pythagore, le premier des problèmes conservés n'a pas besoin de commentaire. Le troisième requiert un traitement plus subtil, mais la mutilation du papyrus nous empêche de savoir comment l'auteur l'a résolu. Le deuxième lui ressemble et le texte en est complet, mais il est elliptique au point que nous le comprenons difficilement.

5. Le traitement du deuxième problème

Bien que les mathématiques grecques et leur histoire me soient peu familières, je risquerai à son propos le commentaire suivant, que les spécialistes corrigeront.

La démarche indiquée conduit à des résultats parfaitement justes mais nous ne saisissons pas d'emblée le raisonnement qui l'inspire. L'auteur ne dit pas de quels principes il fait usage et n'explique pas la raison d'être des opérations qu'il énumère. Il nous faut découvrir le sens qu'elles revêtent à ses yeux et la façon dont il passe successivement de l'une à l'autre. En reconstituant ainsi sa pensée, nous devons éviter de lui prêter l'usage de méthodes algébriques, inconnues dans l'Antiquité. Voici deux raisonnements propres, me semble-t-il, à rendre compte de la suite de ses opérations.

Premier raisonnement possible

Données: 1. somme [hypoténuse + côté vertical] = 8 pieds

2. base = 4 pieds.

1re opération (ll. 18–19) $4^2 = 16$

En considérant la 2e donnée, nous devons comprendre:

$$\text{base}^2 = 4^2 = 16$$

2e opération (ll. 19–20) $16 : 8 = 2$

Le 16 est le résultat de la 1re opération; le 8, la 1re donnée. Nous devons donc comprendre:

(1re interprétation) $\text{base}^2 : [\text{hypoténuse} + \text{côté vertical}] = 16 : 8 = 2$

Il n'est pas possible de passer de ce résultat, ainsi compris, à la 3e opération. On doit admettre que l'auteur lui donne un autre sens. Or le théorème de Pythagore lui apprend que:

$$\text{base}^2 = \text{hypoténuse}^2 - \text{côté vertical}^2$$

Il peut donc comprendre sa 2e opération comme suit:

(2e interprétation) $[\text{hypoténuse}^2 - \text{côté vertical}^2] : [\text{hypoténuse} + \text{côté vertical}] = 16 : 8 = 2$

Pour passer de là aux 3e et 4e opérations, il lui a fallu faire un pas de plus. Il devait, me semble-t-il, savoir que:

$$[\text{un premier nombre}^2 - \text{un second nombre}^2] : [\text{ce premier nombre} + \text{ce second nombre}] = [\text{ce premier nombre} - \text{ce second nombre}]$$

Cela lui permettait en effet de comprendre encore sa 2e opération de la façon suivante:

(3e interprétation) $[\text{hypoténuse}^2 - \text{côté vertical}^2] : [\text{hypoténuse} + \text{côté vertical}] = 16 : 8 = [\text{hypoténuse} - \text{côté vertical}] = 2$

On a constaté que cette 3e interprétation suppose de sa part la connaissance d'une loi indépendante du théorème de Pythagore.

3e opération (ll. 20–21) $8 - 2 = 6$

Le 8 est la 1re donnée; le 2, le résultat que nous venons d'obtenir. La 3e opération a donc un premier sens évident:

(1re interprétation) $[\text{hypoténuse} + \text{côté vertical}] - [\text{hypoténuse} - \text{côté vertical}] = 8 - 2 = 6$

En considérant la 4e opération, nous serons obligés d'admettre que l'auteur a connu l'égalité suivante:

$$[\text{un grand nombre} + \text{un petit nombre}] - [\text{ce grand nombre} - \text{ce petit nombre}] = 2 \times [\text{ce petit nombre}]$$

Cette connaissance lui permettait de comprendre sa 3e opération comme suit:

(2e interprétation) $[\text{hypoténuse} + \text{côté vertical}] - [\text{hypoténuse} - \text{côté vertical}] = 8 - 2 = 2 \times [\text{côté vertical}] = 6$

On constate que cela suppose de sa part la connaissance d'une autre loi indépendante du théorème de Pythagore.

Le sens des opérations suivantes est alors évident.

4e opération (ll. 21–22) $6 : 2 = 3$

$$2 \times [\text{côté vertical}] : 2 = 6 : 2 = 3$$

5e opération (ll. 22–23) $8 - 3 = 5$

$$[\text{hypoténuse} + \text{côté vertical}] - \text{côté vertical} = \text{hypoténuse} = 8 - 3 = 5$$

Second raisonnement possible

1re opération $4^2 = 16$

(1re interprétation) $\text{base}^2 = 4^2 = 16$

En vertu du théorème de Pythagore, l'auteur sait que:

$$\text{base}^2 = \text{hypoténuse}^2 - \text{côté vertical}^2$$

Il peut donc comprendre le résultat de sa 1re opération comme suit:

(2e interprétation) $\text{hypoténuse}^2 - \text{côté vertical}^2 = 16.$

2e opération $16 : 8 = 2$

Le 16 est le résultat que nous venons d'obtenir; le 8, la première donnée. Le sens immédiat de l'opération est donc:

(1re interprétation) $[\text{hypoténuse}^2 - \text{côté vertical}^2] : [\text{hypoténuse} + \text{côté vertical}] = 16 : 8 = 2$

Cette interprétation correspond à la 2e que nous avons donnée de la même opération dans le raisonnement précédent. A partir de là, le second raisonnement se poursuit donc comme le premier.

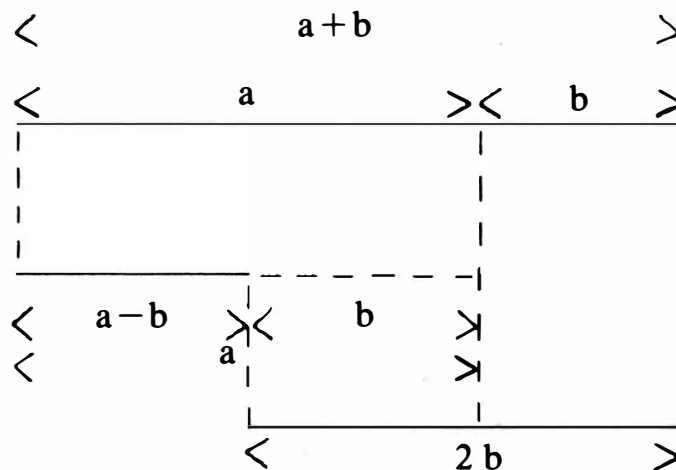
6. Les connaissances requises pour résoudre le deuxième problème

De quelque façon que nous la reconstituons, la démarche suivie par l'auteur semble impliquer la connaissance de deux propositions, indépendantes du théorème de Pythagore. Ce sont:

1. «La différence entre la somme de deux nombres et la différence entre le plus grand et le plus petit d'entre eux est égale au double du plus petit d'entre eux». Nous énonçons algébriquement cette égalité dans la formule:

$$(a + b) - (a - b) = 2b.$$

Les Grecs pouvaient l'établir aisément, en utilisant les méthodes graphiques qui leur étaient familières:



2. «Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence de leurs carrés». Nous énonçons algébriquement cette égalité dans la formule:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

On sait que les mathématiciens grecs ont découvert plusieurs relations de ce type, en symbolisant les nombres par des lignes et des surfaces, au lieu de les symboliser par des lettres, comme nous le faisons en algèbre¹. C'est ainsi (Euclid 2, prop. 4) qu'ils ont par exemple démontré que

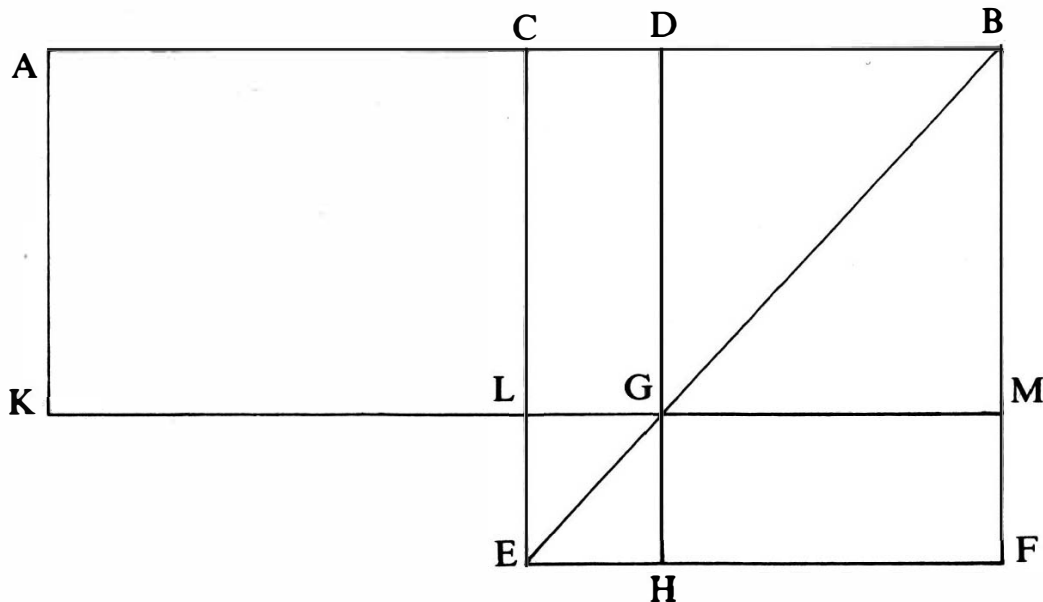
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Par des procédés semblables, ils étaient certainement capables de découvrir notre formule. En voici la preuve:

Euclide (2, prop. 5) démontre la proposition:

$$ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Dans ce but, il fait les constructions notées dans le croquis suivant.



Il trace la droite AB qu'il divise, par C, en deux segments égaux et, par D, en deux segments inégaux. Sur CB, il construit le carré CEFB et trace la diagonale BE. Par D, il tire une parallèle à BF et à CE; elle coupe BE en G et EF en H. Par A, il tire une autre parallèle à BF et à CE. Enfin, par G, il tire une parallèle à AB et à EF; elle coupe AK en K, CE en L et BF en M.

Il peut alors démontrer que le rectangle ADGK (soit la surface $AD \times DB$) + le carré LEHG (soit la surface CD^2) = le carré CBEF (soit la surface CB^2). Si, conformément à l'énoncé de sa proposition, nous considérons la longueur AD,

¹ Cf. T. L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements*, transl. with Introduction and Commentary, 3 vol. (Cambridge 1908) 1, 346-347. 372-374; I. L. Heiberg, *Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum* (München 1925) 3; A. Rey, *La science dans l'antiquité* 4: L'apogée de la science technique grecque ... (Paris 1942) 2e partie, 56.

que nous pouvons appeler a , et la longueur DB , que nous pouvons appeler b , nous constatons que

$$ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

C'est précisément, formulé en langage moderne, ce qu'il voulait établir.

Si nous considérons la longueur AC , que nous pouvons appeler a , et la longueur CD , que nous pouvons appeler b , la même construction et le même raisonnement permettent d'établir que

$$(a+b)(a-b) + b^2 = a^2.$$

On a constaté la chose depuis longtemps². En modifiant très peu, l'ordre des équivalences à établir, la même construction et un raisonnement semblable permettraient de démontrer que le rectangle $ADGK$ = le carré $CBFE$ – le carré $LGHE$ soit donc, si l'on appelle AC , a et CD , b , que

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

En bref, la découverte des deux formules dont le raisonnement de notre auteur paraît impliquer l'usage était accessible aux mathématiciens grecs. Si je ne me suis pas trompé dans l'interprétation de sa démarche, le papyrus genevois prouverait à lui seul qu'ils les ont effectivement connues et les ont utilisées couramment.

2 Cf. Heath, *op. cit.* 1, 373. 383sqq.

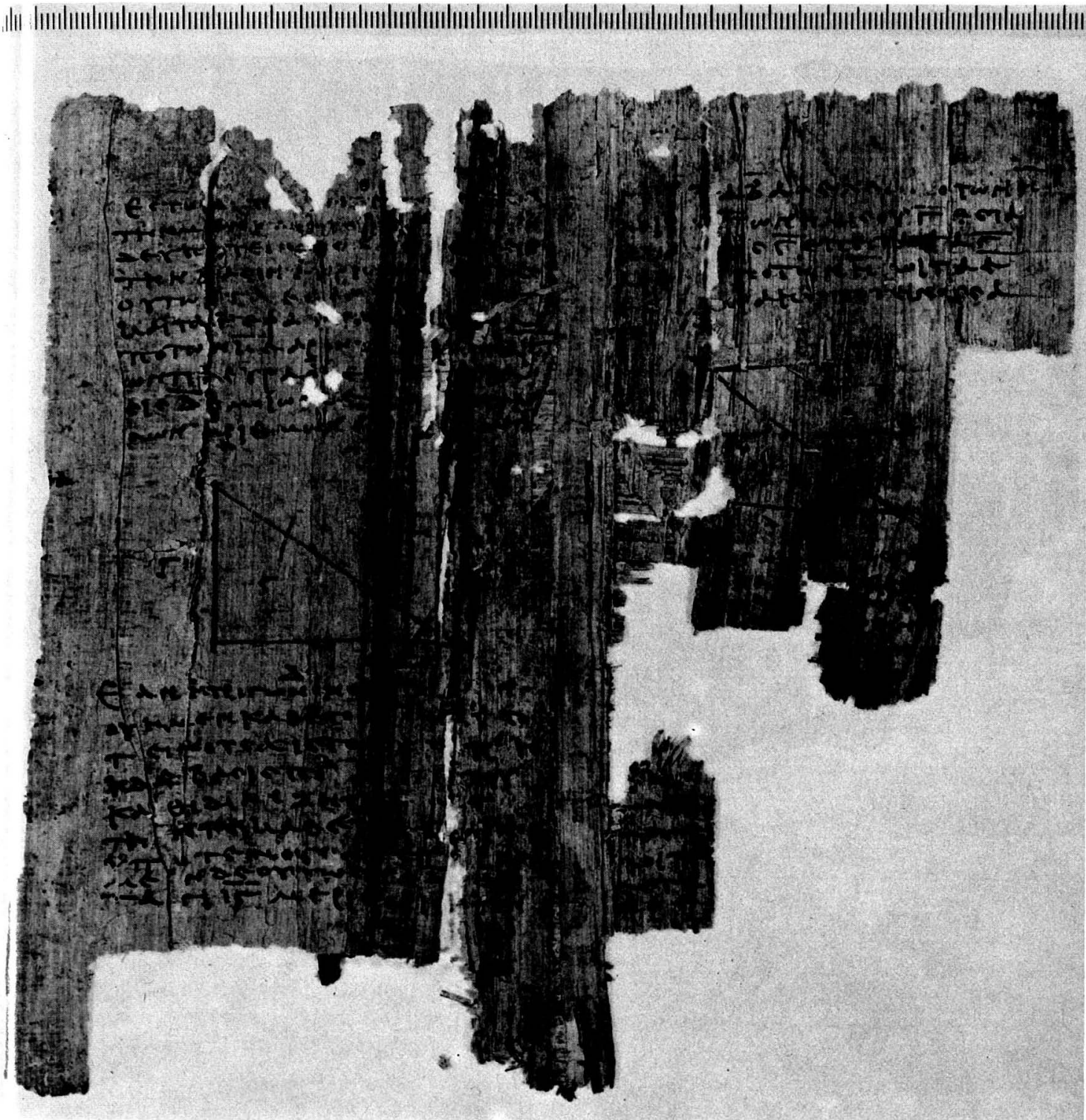


Planche 7. P. Gen. inv. 259.

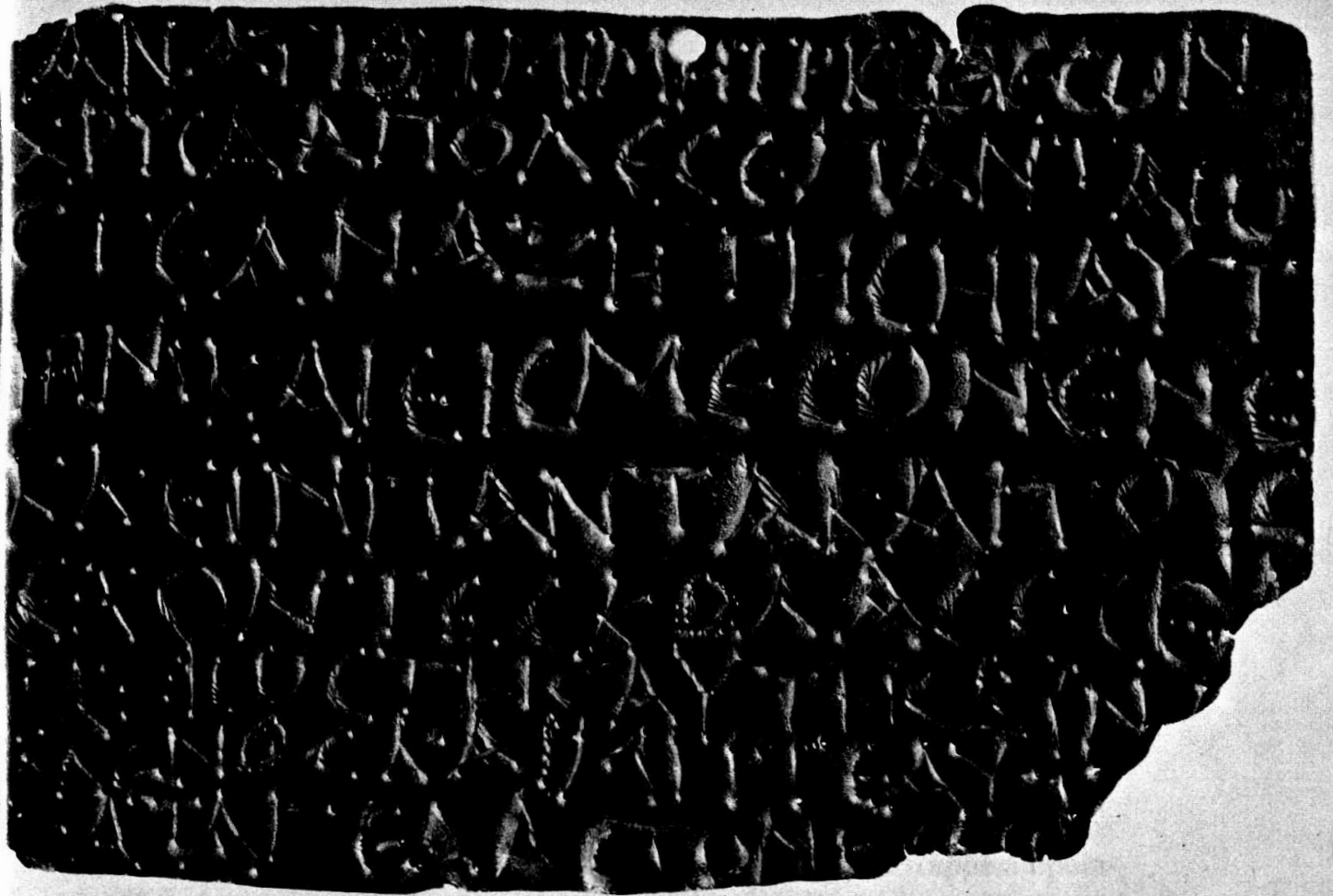


Planche 8. Tablette en bronze (Inv. MAH 20151).